順序複体のシェリング可能性について(離散数理と連続数理における最適化理論)

平林, 隆一; 池辺, 淑子

数理解析研究所講究録
1015 巻 1997 年 103-119

順序複体のシェリング可能性について

東京理科大学　工学部　平林隆一
東京理科大学　工学部　池辺淑子

平成 9 年 9 月 24 日

1　はじめに

単体的凸多面体の面の個数に関する上限定理が McMullen(1970) によって証明された後，この上限定理を任意の単体的球面の面の個数に拡張することが課題となったが，Stanley が Reisner の結果のもとにして，Stanley-Reisner 環を用いて 1975 年に証明した ([4],[5]).

有限半順序集合は，それに含まれる全順序部分集合を単体とみなすことによって,（組合せ的）単体的複体（順序複体）と考えることができる．順序複体がシェリング可能であると，対応する Stanley-Reisner 環が Cohen-Macaulay 環となる ([2],[3],[6] 参照）. Björner([1]) が順序複体のシェリング可能性に対する十分条件を得ているので，本稿では，順序複体のシェリング可能性に対する条件について考察する

2　半順序集合と単体的複体

定義 2.1 (単体的複体): $V=\{v_1,\ldots,v_n\}$ を有限集合とする．V上の単体的複体Δとは，Vの部分集合の族で，

(1) $G\in\Delta$かつ $F\subset G$ ならば，$F\in\Delta$,

(2) $\{v_i\}\in\Delta,\ \ i=1,\ldots,n$

であるときをいう.

定義 2.2 (単体的複体の面): ΔをV上の単体的複体とする．Δの要素FをΔの面といい，$\dim F = |F| - 1$ を Fの次元という．Δの次元は $\dim \Delta = \max\{\dim F | F \in \Delta\}$ で定義する．Δの面 $\{F_i\}_{i \in I}$によって生成されるΔの部分複体を $\langle F_i \rangle_{i \in I}$とおく．

単体的複体Δの極大面をファセット (facet) という．また，単体 $F \in \Delta$ の面 $G \subset F$で $|G| = |F| - 1$ を満たすものを Fのファセットという．単体的複体Δの任意のファセットの次元がすべて等しいとき，Δを**純** (pure) な単体的複体という．以下に述べるシェリング可能性という概念は，純な単体的複体のみを対象にするものである．

定義 2.3 (シェリング可能性): 純な単体的複体 Δ がシェリング可能 (shellable) であるとは，以下の同値な 3 つの条件のいずれかが満足されるときをいう：単体的複体Δ のファセットの集合に線形順序 $F_1, \ldots, F_m$ を与えることができ，

(1) $\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle$ は全ての i $(2 \le i \le m)$ に対して，F_i のファセットの集合によって生成される．

(2) 任意の$i (2 \le i \le m)$ に対して，集合 $\{F : F \in \langle F_1, \ldots, F_i \rangle, F \notin \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle\}$ は唯一の極小元を持つ．

(3) 任意の$i, j\,(1 \le j < i \le m)$ に対して，$F_i \backslash F_k = \{v\}$ となる $v \in F_i \backslash F_j$ と $k \in \{1, 2, \ldots, i-1\}$ が存在する．

上の定義における同値な条件 (1)，(2) および (3) を満足するΔのファセットの線形順序をΔのシェリング (shelling) という．

命題 2.4 (Bruns and Herzog(1993)[2] 参照): 上の定義における条件は互いに同値である．

証明. (1)$\Rightarrow$(2): 一般性を失うことなく，$F_i = \{v_1, \ldots, v_d\}$ かつ，$\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle$ は面 $\{v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_d\}$，$(1 \le j \le r \le d)$ によって生成されているものとしてよい．すると，集合 $S_i = \{F : F \in \langle F_1, \ldots, F_i \rangle, F \notin \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle\}$ の唯一の極小元は $\{v_1, \ldots, v_r\}$ である．
(2)$\Rightarrow$(3): G を S_iにおける唯一の極小元とする．$G \not\subset F_j$であるから，$v \in G \backslash F_j$が存在する．すると，$v \in F_i \backslash F_j$となるから，G の定義によって，$F_i \backslash F_k = \{v\}$ を満たす k, $1 \le k \le i-1$ が存在する．
($G \subset F_i$から，$v \in F_i$である．Gの極小性から，$G \backslash \{v\} \subset F_k$となる k $(1 \le k < i)$ が存在する．このような F_kに対して常に $|F_i \backslash F_k| > 1$ だとすると，$G' = (G \backslash \{v\}) \bigcup_k (F_i \backslash F_k \backslash \{v\})$ とおくと，$G' \in S_i$となる．G'の部分集合で，S_iに属するもののうち極小なものを G''とおくと，$v \notin G''$であるから，G の一意性に矛盾する．したがって，$F_i \backslash F_k = \{v\}$ を満たす k $(1 \le k \le i-1)$ が存在する．)
(3)$\Rightarrow$(1): $F \in \langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle$ とする．すると，$F \subset F_j$ をみたす

j $(< i)$ が存在する．したがって，(3) の仮定から，$F_i \backslash F_k = \{v\}$ となる $v \in F_i \backslash F_j$ と $k \in \{1, \ldots, i-1\}$ が存在する．このとき，$F \subset F_i \backslash \{v\} \subset F_k$ であるから，$F_i \backslash \{v\}$ は F を含む F_i のファセットであり，$\langle F_i \rangle \cap \langle F_1, \ldots, F_{i-1} \rangle$ に含まれる． ■

3 順序複体とシェリング可能性

定義 3.1 (半順序集合): 集合 P 上の 2 項関係を$\leq$とするとき，$(P, \leq)$ が半順序 (partial order) であるとは，

(1) （反射律） $x \leq x$,

(2) （反対称律） $x \leq y,\ y \leq x \ \Rightarrow\ x = y$,

(3) （推移律） $x \leq y,\ y \leq z \ \Rightarrow\ z \leq z$

が成り立つときをいう．また，しばしば P を半順序集合という．

半順序集合からは，ごく自然に単体的複体が構成できる．

定義 3.2 (順序複体): P を半順序集合とする．$v_{i_1}, \ldots, v_{i_r} \in P$ が $v_{i_1} \leq \cdots \leq v_{i_r}$ をみたすとき，$\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ を P の鎖 (chain) という．このとき，$r-1$ をこの鎖の長さという．P の長さ (length) とは，P の鎖の長さの最大値をいうものとする．また，$\Delta(P)$ を P のすべての鎖からなる集合とすると，$\Delta(P)$ は複体となるので，P に付随する順序複体 (ordered complex) という．

本稿では順序複体 $\Delta(P)$ のシェリング可能性について考察する．もちろん，単体的複体のシェリング可能性を議論するのであるから，$\Delta(P)$ が純になるような半順序集合だけが対象になる．

定義 3.3 (半順序集合における点のランク): P を半順序集合とする．$v \in P$ のランク (rank) とは，v と v より小さい元からなる P の鎖の長さの最大値をいい，rank v で表すものとする．

定義 3.4 (細分不能な鎖): P を半順序集合とする．$x \leq y, x \neq y$ が，$x \leq z \leq y$ なら $x = z$ か $y = z$ となるとき，y は x をカバー (cover) するといい $x \prec y$ と書くことにする．$\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\} \subset P$ が $v_{i_1} \prec v_{i_2} \prec \cdots \prec v_{i_r}$ である鎖であるとき，鎖 $\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_r}\}$ を細分不能 (unrefinable) な鎖という．また，集合の包含関係において極大な鎖を極大鎖 (maximal chain) という．

定義 3.5 (次数付き半順序集合): 半順序集合が最小元と最大元を持つとき，有界 (bounded) な半順序集合という．半順序集合のすべての極大鎖が同じ長さを持つとき，純 (pure) な半順序集合という．有界かつ純な半順序集合を次数付き (graded) 半順序集合という．

この定義より，$\Delta(P)$が純$\Leftrightarrow$ $(P,\leq)$が純であることは明らかである．シェリング可能性について議論するならば，本来，有界でない（次数付きでない）純な半順序集合も対象となるはずであるが，次に示すように，次数付きのものに限っても一般性を失わない．

補題 3.6. $(P,\leq)$ を純な半順序集合とし，$\hat{0},\hat{1}\notin P$ を任意の $x\in P$に対して$\hat{0}\leq x\leq\hat{1}$ を満たすものと定義する．すると，次のことが成立する：

(1) $(P\cup\{\hat{0},\hat{1}\},\leq)$ は次数付き半順序集合である．

(2) $\Delta(P)$ がシェリング可能であるための必要十分条件は$\Delta(P\cup\{\hat{0},\hat{1}\})$ がシェリング可能であることである．

証明. (1) は自明である．(2) についても，F が $\Delta(P)$ のファセットであることの必要十分条件が $F\cup\{\hat{0},\hat{1}\}$ が$\Delta(P\cup\{\hat{0},\hat{1}\})$ のファセットであることと，定義 2.3の (3) を見ればやはり自明である． ∎

以下の Björner の得た結果の証明を詳細を述べることは，本稿で得た結果に直接には関係しないのであるが，順序複体のシェリング可能性を考える意味が明確になることと，結果自身の重要性から，証明を省略せずに載せることとした．

補題 3.7 (Björner(1980)[1]): $(P,\leq)$ を次数付き半順序集合とし，$\mathcal{M}$ を Pの極大鎖全体からなる集合とする．すると，$\mathcal{M}$ の線形順序Ωで，任意の 2 つの極大鎖$\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}'\in\mathcal{M},\boldsymbol{m}\ :\ \hat{0}=x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_n=\hat{1}$, $\boldsymbol{m}'\ :\ \hat{0}=y_0\prec y_1\prec\cdots\prec y_n=\hat{1}$ で $x_i=y_i$ $(i=0,1,\ldots,e)$ および $x_{e+1}\neq y_{e+1}$を満足するものに対して次の条件を満足するものが存在する：

(1) $\boldsymbol{m}'<^{\Omega}\boldsymbol{m}$ であって，極大鎖$\boldsymbol{m}''$が $\{y_0,y_1,\ldots,y_{e+1}\}$ を含むなら，$\boldsymbol{m}''<^{\Omega}\boldsymbol{m}$である，

(2) $\boldsymbol{m}''<^{\Omega}\boldsymbol{m}$なる極大鎖$\boldsymbol{m}''$ で$\boldsymbol{m}'\backslash\{x_e\}$ を含むものが存在し，$\boldsymbol{m}'''<^{\Omega}\boldsymbol{m}$を満たす極大鎖$\boldsymbol{m}'''$で$\boldsymbol{m}\backslash\{x_e\}$ を含むものは存在しないものとすると，$\boldsymbol{m}'<^{\Omega}\boldsymbol{m}$である．

証明. (1),(2) を満たす $\mathcal{M}$ の線形順序の存在を，Pの長さ n に関する帰納法によって証明する．$n=2$ の場合には主張は明らかなので，$n\geq 3$ としてよい．$P'=\{x\in P\mid \mathrm{rank}\ x\neq n-1\}$ とする．(P'の順序$<'$はPの順序$<$ から誘導されるものとする．すなわち，$x,y\in P'$に対して，$x<'y\Leftrightarrow x<y$である)．P' は長さ$n-1$ の次数付き半順序集合であるので，帰納法の仮定から，P'の極大鎖からなる集合 $\mathcal{M}'$上の線形順序Ω' で，(1) および (2) を満たすものが存在する．$\boldsymbol{m}_1',\boldsymbol{m}_2',\ldots,\boldsymbol{m}_s'$ を $\mathcal{M}'$における，上の意味の線形順序とする．$\boldsymbol{m}_i'\ :\ \hat{0}=x_0\prec x_1\prec\cdots\prec x_{n-2}\prec x_n=\hat{1}$に対して，集合 $A_i=\{z\in P\ :\ x_{n-2}\prec z\prec\hat{1}\}$ と集合 $B_i=\{z\in A_i\ :\ \exists y\in P,x_{n-3}\prec y\prec z$ かつ $(\boldsymbol{m}_i'\backslash\{x_{n-2}\})\cup\{y\}<^{\Omega}\boldsymbol{m}_i'\}$ を定義する．さらに，

$C_i = A_i \backslash B_i$とおく．さて，B_i の任意の要素が C_iの任意の要素より大きくなるように A_iの要素に線形順序を与えておき，A_iの要素をその線形順序に従って，$z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{ia_i}$ $(a_i = |A_i|)$ と並べておく．さらに，$j = 1, 2, \ldots, a_i$ に対して，$\boldsymbol{m}_{ij} = \boldsymbol{m}'_i \cup \{z_{ij}\}$ とおく．添字に対する辞書式順序によって，Pの極大鎖の集合 $\mathcal{M} = \{\boldsymbol{m}_{ij} : 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq a_i\}$ に対する線形順序 Ωを定義する．

線形順序Ωが (1) および (2) を満足することを証明する：
実際，$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ を$\boldsymbol{m} : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$，$\boldsymbol{m}' : \hat{0} = y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_n = \hat{1}$，ただし，$x_i = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, e)$ かつ $x_{e+1} \neq y_{e+1}$とおくと，以下の 2 つの場合が考えられる．

最初に $e + 1 = n - 1$ の場合を考える； このとき，$1 \leq i \leq s$ と $1 \leq j, k \leq a_i$を満たす i, j, kが存在して，$\boldsymbol{m}' = \boldsymbol{m}_{ij}$ かつ$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_{ik}$となる．すると，必然的に$\boldsymbol{m}'' = \boldsymbol{m}'$となるので，条件 (1) が満たされる．条件 (2) の仮定から，$y_{n-1} \in B_i$ かつ $x_{n-1} \in C_i$である．したがって，$j < k$ となり，このことから $\boldsymbol{m}' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$が得られる．

2 番目の場合として，$e + 1 < n - 1$ とする．
$\{y_0, y_1, \ldots, y_{e+1}\} \subset \boldsymbol{m}'' \in \mathcal{M}$ とすると，$\{y_0, y_1, \ldots, y_{e+1}\} \subset (\boldsymbol{m}'' \backslash \{z\}) \in \mathcal{M}'$である．ただし，$z \in \boldsymbol{m}''$ かつ $\operatorname{rank} z = n - 1$ である．いま，$\boldsymbol{m}' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$ とする；すると，$\boldsymbol{m}' \backslash \{y_{n-1}\} <^{\Omega'} \boldsymbol{m} \backslash \{x_{n-1}\}$ である．したがって，帰納法の仮定から，$\boldsymbol{m}'' \backslash \{z\} <^{\Omega'} \boldsymbol{m} \backslash \{x_{n-1}\}$ となる．このとき，$\boldsymbol{m}'' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$となるから，条件 (1) が成り立つことが証明された．

次に，$\boldsymbol{m}'' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$を満たす極大鎖$\boldsymbol{m}''$で$\boldsymbol{m}' \backslash \{x_e\}$ を含むものは存在するが，$\boldsymbol{m}''' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$である極大鎖$\boldsymbol{m}'''$で$\boldsymbol{m} \backslash \{x_e\}$ を含むものは存在しないものとする．すると，$\boldsymbol{m}'' \backslash \{y_{n-1}\} <^{\Omega'} \boldsymbol{m} \backslash \{x_{n-1}\}$ であり，また，$(\boldsymbol{m} \backslash \{x_e\}) \backslash \{x_{n-1}\}$ は$\boldsymbol{m}'''' \backslash \{x_{n-1}\} <^{\Omega'} \boldsymbol{m} \backslash \{x_{n-1}\}$ であるような極大鎖$\boldsymbol{m}''''$には含まれない．したがって，$\boldsymbol{m}' \backslash \{y_{n-1}\} <^{\Omega'} \boldsymbol{m} \backslash \{x_{n-1}\}$ となる．すると，$\boldsymbol{m}' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$となるから，条件 (2) が成り立つ． ∎

補題 3.8. 次数付き半順序集合 $(P, \leq)$ において，任意の比較可能な 2 つの要素の間の細分不能な鎖は同じ長さをもつ．

証明. $x < y$なる $x, y \in P$が存在して，$x = x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_p = y$ と $x = y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_q = y$，$(p \neq q)$ がそれぞれ細分不能な鎖であるものとする．いま，$\hat{0} = u_0 \prec u_1 \prec \cdots \prec u_r = x$ $(y = v_0 \prec v_1 \prec \cdots \prec v_s = \hat{1})$）を$\hat{0}$ と x （y と$\hat{1}$）の間の細分不能な鎖とする．すると，$\hat{0} = u_0 \prec \cdots \prec u_r = x = x_0 \prec \cdots \prec x_p = y = v_0 \prec \cdots \prec v_s = \hat{1}$ と $\hat{0} = u_0 \prec \cdots \prec u_r = x = y_0 \prec \cdots \prec y_q = y = v_0 \prec \cdots \prec v_s = \hat{1}$ はそれぞれ長さ $r + p + s$，$r + q + s$ の $\hat{0}$ と $\hat{1}$ の間の細分不能な極大鎖である．これは $(P, \leq)$ は次数付き半順序集合であることに反する． ∎

4　局所上半モジュラー半順序集合

本節では，半順序集合が局所上半モジュラーという性質を満たすならば，付随する順序複体がシェリング可能である，という Björner の重要な結果について述べる．

定義 4.1 (局所上半モジュラー半順序集合): 半順序集合 $(P, \leq)$ が局所上半モジュラー (locally upper semimodular) 半順序集合であるとは，$x \prec u, v$ かつ $u, v < t$ であるとき，$y \in P$ が存在して，$u \prec y$，$v \prec y$ かつ $y \leq t$ を満たすときをいう．

補題 4.2. $(P, \leq)$ を有界な局所上半モジュラー半順序集合とする．すると，$(P, \leq)$ は純である．

証明.　$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ を$\boldsymbol{m}$: $\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_p = \hat{1}$ かつ$\boldsymbol{m}'$: $\hat{0} = y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_q = \hat{1}$とし，$x_i = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, e)$ かつ $x_{e+1} \neq y_{e+1}$ を満たす極大鎖とする．$p = e = q$であれば証明すべきことは何もない．$e < p$とすると，$(P, \leq)$ の上半モジュラー性によって，$x_{e+1} \prec x'_{e+2}$ かつ $y_{e+1} \prec x'_{e+2}$を満たす x'_{e+2}が存在する．すると，$(P, \leq)$ の上半モジュラー性によって，$x_{e+2} \prec x'_{e+3}$ かつ $x'_{e+2} \prec x'_{e+3}$ を満たす x'_{e+3}が存在する．したがって，帰納的に$\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_e \prec y_{e+1} \prec x'_{e+2} \prec \cdots \prec x'_p = \hat{1}$ となる．再度，帰納法によって，$p = q$が得られる．■

定理 4.3 (Björner(1980)[1]): 局所上半モジュラーな次数付き半順序集合に付随する順序複体はシェリング可能である．

証明.　補題 3.7によって，P の極大鎖からなる集合 $\mathcal{M}$ には条件 (1) と (2) を満足する線形順序 Ω が存在する．この線形順序Ω が$\Delta(P)$ のシェリングであることを示すことにする．

$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ として，$\boldsymbol{m}$: $\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$ および $\boldsymbol{m}'$: $\hat{0} = y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_n = \hat{1}$ で$\boldsymbol{m}' \prec^{\Omega} \boldsymbol{m}$であるものとする．$d$ を $i \leq d$ に対して $x_i = y_i$となるような最大の整数とし，gを $y_{d+1} < x_g$となる最小の整数とする．

Pが局所上半モジュラーなので，$y_{d+1} \prec z_{d+2}$ かつ $x_{d+1} \prec z_{d+2}$であり，さらに$z_{d+2} < x_g$である $z_{d+2} \in P$が存在する．$g > d+2$ のときは，再び，$z_{d+2} \prec z_{d+3}$ かつ $x_{d+2} \prec z_{d+3}$であり，さらに $z_{d+3} < x_g$となる $z_{d+3} \in P$ が存在する．これを続けることによって，$z_g = x_g$となる．gの定義から，$d+1 \leq e \leq g-1$ である任意の e に対して $y_e \neq x_e$ および $z_e \neq x_e$ が成立する．

$z_{d+1} = y_{d+1}$とおき，$i = d+1, d+2, \ldots, g-1$ に対して，$\boldsymbol{m}_i$ を極大鎖$\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_{i-1} \prec z_i \prec z_{i+1} \prec \cdots \prec z_{g-1} \prec x_g \prec x_{g+1} \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$とする．$\boldsymbol{m}' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$であると仮定しているので，補題 3.7における$\Omega$に対する性質 (1) によって$\boldsymbol{m}_{d+1} <^{\Omega} \boldsymbol{m}$となる．すると，$\boldsymbol{m}'' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$が存在して$\boldsymbol{m} \backslash \{x_{d+1}\} \subset \boldsymbol{m}''$ となるか（これは，我々が望んでいる結果

である)，そうでなければ，線形順序Ωに対する性質 (2) (補題 3.7) から $\boldsymbol{m}_{d+2} <^{\Omega} \boldsymbol{m}$となる．再び，極大鎖$\boldsymbol{m}'' <^{\Omega} \boldsymbol{m}$が存在して$\boldsymbol{m}\backslash\{x_e\} \subset \boldsymbol{m}''$となる（この場合は証明終わり）か，$\boldsymbol{m}_{d+3} <^{\Omega} \boldsymbol{m}$となる．この議論を続けることによって，ある e に対して$\boldsymbol{m}\backslash\{x_e\}$ が$\boldsymbol{m}$よりΩに関して小さい極大鎖に含まれることになるか，$\boldsymbol{m}_{g-1} <^{\Omega} \boldsymbol{m}$になる．後者の場合には，$\boldsymbol{m}_{g-1} <^{\Omega} \boldsymbol{m}$に対して$\boldsymbol{m}\backslash\{x_{g-1}\} \subset \boldsymbol{m}_{g-1}$ となる． ∎

5 局所弱上半モジュラー半順序集合

Björner の定理は（半順序集合の頂点数の）多項式時間でチェックできるような，シェリング可能であるための十分条件を与えるという意味で，非常に強力である．しかし一方では，条件として強いため，付随する順序複体がシェリング可能であるが，局所上半モジュラーでない半順序集合も多数存在する．また，半順序集合$(P, \leq)$の大小関係を入れ換えた半順序集合$(P, \leq')$, $(x \leq' y \Leftrightarrow y \leq x)$ に付随する順序複体はもとの半順序集合に付随するものと同一なので，本来，大小関係の入れ換えはシェリング可能性には無関係なはずである．しかし，局所上半モジュラー性はこのような入れ換えにおいて，保存されない．すなわち，$(P, \leq)$が局所上半モジュラーであっても，$(P, \leq')$がそうであるとは限らない．そこで，局所上半モジュラーを拡張した局所弱上半モジュラー性を考えることにする．

定義 5.1 (局所弱上半モジュラー性): 半順序集合 $(P, \leq)$ が局所弱上半モジュラー (locally weak upper semimodular) であるとは，$x \prec u, v$ かつ $u, v < t$ であるとき，$w_1, \ldots, w_\ell, y_1, \ldots, y_{\ell+1} \in P$ が存在して，$x \prec w_i$ $(1 \leq i \leq \ell)$, $u = w_0, w_1 \prec y_1$, $w_1, w_2 \prec y_2$, $\ldots$, $w_\ell, w_{\ell+1} = v \prec y_{\ell+1}$ かつ $y_i \leq t$ $(1 \leq i \leq \ell+1)$ を満たすときをいう．

補題 5.2. 半順序集合 $(P, \leq)$ は有界かつ局所弱上半モジュラーであるとする．すると，$(P, \leq)$ は純である．

証明. Pの長さに関する帰納法によって証明する．

Pの長さが 2 であれば，証明すべきことは何もない．$p > 2$ として，p 以下の長さをもつ半順序集合に対しては補題が成り立つものとする．P を長さが$p+1$ の半順序集合とする．極大鎖$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ をそれぞれ $\boldsymbol{m} : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_p = \hat{1}$ および $\boldsymbol{m}' : \hat{0} = y_0 \prec y_1 \prec \cdots \prec y_q = \hat{1}$ とし，$x_i = y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, e)$ かつ $x_{e+1} \neq y_{e+1}$が成り立っているものとする．Pの局所弱上半モジュラー性によって，$x_e = y_e \prec w_i$ $(i = 1, \ldots, \ell)$, $x_{e+1} = w_0, w_1 \prec u_1$, $w_1, w_2 \prec u_2$, $\ldots$, $w_\ell, w_{\ell+1} = y_{e+1} \prec u_{\ell+1}$ かつ $u_i \leq \hat{1}$, $1 \leq i \leq \ell+1$ を満たす $w_1, \ldots, w_\ell$, $u_1, \ldots, u_{\ell+1} \in P$が存在する．ここで，$P_i = \{z \in P : w_i \leq z\}$ $(i = 0, \ldots, \ell+1)$ とおくと，P_i $(i = 0, \ldots, \ell+1)$ は局所弱上半モジュラーな半順序集合であるから純な

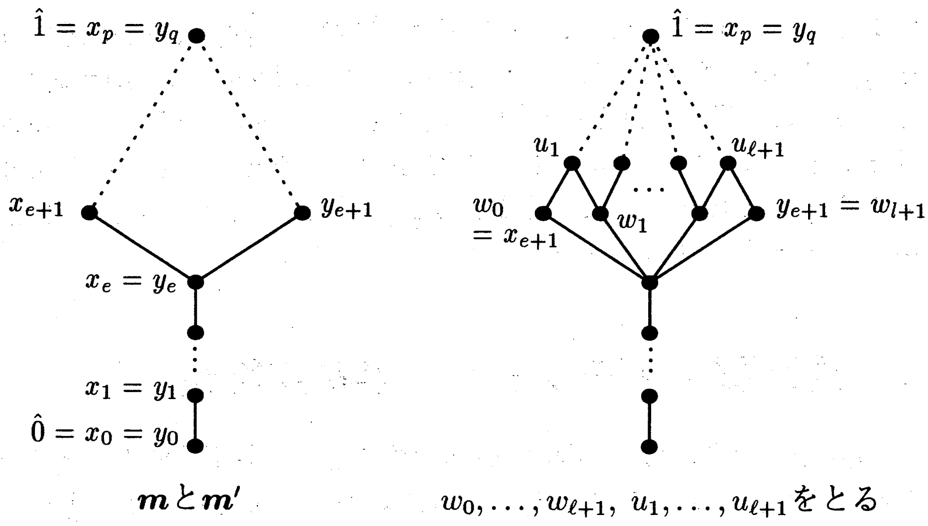


図 1: 局所弱上半モジュラー半順序集合

半順序集合である．また，$\{z \in P : u_i \leq z\} \subset P_{i-1} \cap P_i$ $(i = 1, \ldots, \ell+1)$ かつ $\{z \in P : u_i \leq z\}$ は純であるから，P_i $(i = 0, \ldots, \ell+1)$ の長さはすべて等しい．したがって，P は純である．(図 1参照) ∎

次に局所弱上半モジュラー性において大小関係を入れ換えた，局所弱下半モジュラー性を定義し，局所弱上半モジュラー性がこのような入れ換えにおいて保存されることを示す．

定義 5.3 (局所弱下半モジュラー): 半順序集合 $(P, \leq)$ が局所弱下半モジュラー (locally weak lower semimodular) であるとは，半順序集合 $(P, \leq')$ が局所弱上半モジュラーであるときをいう．ただし，2 項関係 $\leq'$ は $x \leq' y \ \Leftrightarrow\ y \leq x$ によって定義するものとする．

命題 5.4. $(P, \leq)$ を半順序集合とする．すると，

$$(P, \leq) \text{ は局所弱上半モジュラー} \quad \Leftrightarrow \quad (P, \leq') \text{ は局所弱下半モジュラー}$$

である．

証明. $\Rightarrow$ の部分だけを証明すれば十分である．
まず，与えられた $x, t,\ x \leq t,$ および l (ただし $0 \leq l \leq \mathrm{rank}(t) - \mathrm{rank}(x)$) に対して

$$P_l(x, t) = \{u \in P \mid x \leq u \leq t, \mathrm{rank}\ (u) = \mathrm{rank}\ (x) + l\}$$

を定義すると，$(P, \leq)$ が局所弱上半モジュラーであるための必要十分条件は，任意の $x \leq t$ に対して，$P_1(x, t) \cup P_2(x, t)$ によって誘導される半順序集合のハッセ図が連結であることであり，また，$(P, \leq)$ が局所弱下半モジュラーであるための必要十分条件は，任意の $x \leq t$ に対して，

$P_{\text{rank }(t)-\text{rank }(x)-2}(x,t) \cup P_{\text{rank }(t)-\text{rank }(x)-1}(x,t)$ によって誘導される半順序集合のハッセ図が連結であることに注意する．

$(P,\leq)$ が局所弱上半モジュラーであると，$x \leq t$ および $1 \leq l \leq \text{rank }(t) - \text{rank }(x) - 2$ を満たす任意の $x,t \in P$, および l に対して，$P_l \cup P_{l+1}$ によって誘導される半順序集合に対するハッセ図は連結であることを帰納法によって証明する．$l=1$ の場合は，主張は単に $(P,\leq)$ が局所弱上半モジュラーであることをいっているだけであるから，$l \geq 2$ と仮定してよい．また，$l-1$ の場合には主張が成り立っているものとする．いま，$P_{l-1}(x,t) = \{y_1,\ldots,y_p\}$，とおくと，$P_l(x,t) = \cup_{i=1}^{p} P_1(y_i,t)$ かつ $P_{l+1}(x,t) = \cup_{i=1}^{p} P_2(y_i,t)$ となる．$(P,\leq)$ の局所弱上半モジュラー性から，すべての $y_i \in P_{l-1}(x,t)$ に対して，$P_1(y_i,t) \cup P_2(y_i,t)$ によって誘導される半順序集合に対するハッセ図の連結性が保証される．また，帰納法の仮定から，任意の $u,v \in P_l(x,t)$ に対して $u=u_0,u_1,\ldots,u_r=v$ が存在して，$j=0,\ldots,r-1$ に対して u_j と u_{j+1} は共通の要素をカバーすることがわかる．すると，再び局所弱上半モジュラー 性から u_j と u_{j+1} は $P_l(x,t) \cup P_{l+1}(x,t)$ によって誘導されるハッセ図において連結であることがわかる．したがって，$P_l(x,t) \cup P_{l+1}(x,t)$ によって誘導されるハッセ図は連結であることが証明された． ∎

局所弱上半モジュラー性は大小関係を入れ換えても保存される，という意味である程度妥当なものである思われる．また，次に示すようにシェリング可能性の必要条件を与える．

命題 5.5 (必要条件): $(P,\leq)$ を次数付き半順序集合で，$\Delta(P)$ がシェリング可能であるとすると，P は局所弱上半モジュラーである．

証明. $\boldsymbol{m}_1,\ldots \boldsymbol{m}_n$ を $\Delta(P)$ のシェリングとする．以下のことを証明すれば十分である：

$(*)$ 任意の $\boldsymbol{m}_s,\boldsymbol{m}_t$ に対して，$x,w \in \boldsymbol{m}_s \cap \boldsymbol{m}_t$ と $y \in \boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_t, z \in \boldsymbol{m}_t \backslash \boldsymbol{m}_s$ で，$x \prec y \leq w$，$x \prec z \leq w$ を満たし，しかも y,z は x, w に関して局所弱上半モジュラーではないようなものは存在しない．

$|\boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_t|$ に関する帰納法によって証明する．

(step 1) $|\boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_t| = 2$ の場合には，次の $(**)$ を証明する：

$(**)$ 次の性質を満足する極大鎖の組は存在しない：

$(***)\boldsymbol{m} : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_e \prec x_{e+1} \prec x_{e+2} \prec x_{e+3} \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$

と $\boldsymbol{m}' : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_e \prec y_{e+1} \prec y_{e+2} \prec x_{e+3} \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$

を $\boldsymbol{m}' < \boldsymbol{m}$ かつ $x_{e+1} \neq y_{e+1}$，$x_{e+2} \neq y_{e+2}$ であるものとし，x_{e+1}, y_{e+1} は x_e, x_{e+3} に関して局所弱上半モジュラー性を満たさない．

$(**)$ の証明：

$(\boldsymbol{m}_s,\boldsymbol{m}_t)$ を $(***)$ を満足するものの中で辞書的に最小なものとする．$\boldsymbol{m}_1,\ldots \boldsymbol{m}_n$ が $\Delta(P)$ のシェリングであるから，$v \in (\boldsymbol{m}_t \backslash \boldsymbol{m}_s)$ と $\boldsymbol{m}_i (< \boldsymbol{m}_t)$ が存在して，$\boldsymbol{m}_t \backslash \boldsymbol{m}_i = \{v\}$ となる．このとき，2 通りの場合が生じる：

場合 1： $v = x_{e+1}$.

$\boldsymbol{m}_i$を$\boldsymbol{m}_i : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_e \prec z_{e+1} \prec x_{e+2} \prec x_{e+3} \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$とする．$\boldsymbol{m}_i < \boldsymbol{m}_t$であるから，$\boldsymbol{m}_t$の最小性によって，$y_{e+1}$ と z_{e+1} は局所弱上半モジュラー性を満たす． すると，x_{e+1} と y_{e+1} も局所弱上半モジュラー性を満たす．これは仮定に反する．

場合 2： $v = x_{e+2}$.

$\boldsymbol{m}_i : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_e \prec x_{e+1} \prec z_{e+2} \prec x_{e+3} \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$とする．$x_{e+1}$ と y_{e+1} は局所弱上半モジュラー性を満たさないので，$y_{e+2} \neq z_{e+2}$である．すると，$\boldsymbol{m}_s$ および $\boldsymbol{m}_i$ は $(***)$ を満たし，$(\boldsymbol{m}_s, \boldsymbol{m}_t)$ の最小性に反する．

(step 2) $|\boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_t| \leq k-1$ を満たすすべての組 $(\boldsymbol{m}_s, \boldsymbol{m}_t)$ に対して $(*)$ が成り立つものと仮定して，$|\boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_t| = k$を満たす全ての組 $(\boldsymbol{m}_s, \boldsymbol{m}_t)$ に対して $(*)$ が成り立つことを証明する．

$(\boldsymbol{m}_s, \boldsymbol{m}_t)$ を

(1) $|\boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_t| = k$,

(2) $x, w \in \boldsymbol{m}_s \cap \boldsymbol{m}_t$, $y \in \boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_t$, $z \in \boldsymbol{m}_t \backslash \boldsymbol{m}_s$が存在して，$x \prec y \leq w$, $x \prec z \leq w$ を満たすが，y, zは x, wに関して局所弱上半モジュラーでない

を満たす辞書的に最小なものとする．$k = 2$ の場合と同様にして，$v \in (\boldsymbol{m}_t \backslash \boldsymbol{m}_s)$ と$\boldsymbol{m}_i (< \boldsymbol{m}_t)$ が存在して，$\boldsymbol{m}_t \backslash \boldsymbol{m}_i = \{v\}$ となる．また，$\{u\} = \boldsymbol{m}_i \backslash \boldsymbol{m}_t$ とおく．このとき，次の 2 つの場合が生じる：

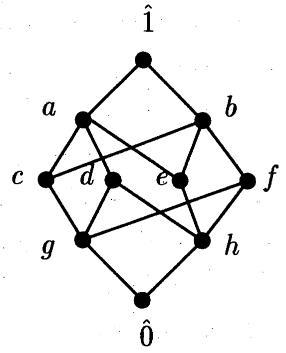
$v = z$の場合：(step 1) の場合 1 のときと同様の理由から，この場合は矛盾が生じる．

$v \neq z$の場合：$u \in \boldsymbol{m}_s$であるとすると，$|\boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_i| = k-1$ である．このとき，組 $(\boldsymbol{m}_s, \boldsymbol{m}_i)$ は帰納法の仮定に矛盾する．$u \notin \boldsymbol{m}_s$ とすると，$|\boldsymbol{m}_s \backslash \boldsymbol{m}_i| = k$ であり，$(\boldsymbol{m}_s, \boldsymbol{m}_t)$ の最小性に矛盾する．

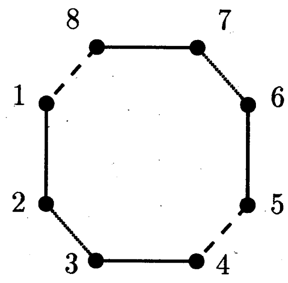
以上によって証明された． ∎

この定理より，局所弱上半モジュラー性は順序複体がシェリング可能である必要条件であることがわかる．しかし，十分条件ではない．なぜなら図 2の半順序集合は局所弱上半モジュラーであるが，シェリング可能ではないからである．この例からもわかるように，半順序集合のハッセ図だけの性質でシェリング可能性を議論することは大変難しい．そこで，シェリングの対象となる極大鎖を頂点とするようなグラフを導入することにする．

定義 5.6 (極大鎖グラフ): $(P, \leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とし，$\mathcal{M}$ を Pのすべての極大鎖からなる集合とする．このとき，$E(P) = \{\{\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'\} : \boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}, |\boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}'| = 1\}$ として，グラフ $G(P) = (\mathcal{M}, E(P))$をつくる．このグラフの各辺 $\{m, m'\} \in E(P)$ に色 $i = \mathrm{rank}v(\{v\} = \{\boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}'\})$ を彩色することにする．この辺彩色されたグラフ $G(P)$ を P の極大鎖グラフ (maximal chain graph) ということにする．



$1: \hat{0} \prec g \prec c \prec a \prec \hat{1}$
$2: \hat{0} \prec g \prec d \prec a \prec \hat{1}$
$3: \hat{0} \prec h \prec d \prec a \prec \hat{1}$
$4: \hat{0} \prec h \prec e \prec a \prec \hat{1}$
$5: \hat{0} \prec h \prec e \prec b \prec \hat{1}$
$6: \hat{0} \prec h \prec f \prec b \prec \hat{1}$
$7: \hat{0} \prec g \prec f \prec b \prec \hat{1}$
$8: \hat{0} \prec g \prec c \prec b \prec \hat{1}$



$(P, \leq)$ 　　 極大鎖 　　 $G(P)$

図 2: $\Delta(P)$ がシェリング可能でない例

極大鎖グラフを用いると，$(P, \leq)$ が局所弱上半モジュラー，局所上半モジュラーおよび $\Delta(P)$ がシェリング可能であるための条件を「視覚的に」記述することができる．

定義 5.7 (性質 (C)): $(P, \leq)$ を次数付き半順序集合とし，$S \subset \mathcal{M}$ とする．$G(P)$ が Sに関して性質 (C) を持つとは ：
(C) $G(S)$ を Sによって誘導された $G(P)$ の部分グラフとし，$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in S$ とする．このとき，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{m}'$ を結ぶ道が $G(S)$ の中に存在し，道の中の任意の辺 $\{\boldsymbol{m}'', \boldsymbol{m}'''\}$ の色は，$\{i \mid \exists u \in \boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}' \ s.t. \ i = \mathrm{rank} \ u\}$ に含まれる．
をみたすときをいう．

補題 5.8 (局所弱上半モジュラーのための必要十分条件): $(P, \leq)$ を次数付き半順序集合とする．このとき，$(P, \leq)$ が局所弱上半モジュラーであるための必要十分条件は，$G(P)$ が $\mathcal{M}$ に関して性質 (C) を持つことである．

証明. 　　必要性）帰納法によって証明する．
$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ が $|\boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}'| = 1$ をみたせば，主張は明らかに成り立つ．

いま，任意の$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ で $|\boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}'| \leq k - 1$ を満たすものには，$G(P)$ の中で$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{m}'$を結ぶ道でその枝の色は $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}') = \{i : \exists v \in \boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}' \ \text{s.t.} \ \mathrm{rank} \ v = i\}$ に含まれるものが存在するものとする．

$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ をそれぞれ $|\boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}'| = k$ かつ $\boldsymbol{m} : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_e \prec x_{e+1} \prec \cdots \prec x_{f-1} \prec x_f \prec x_{f+1} \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$，$\boldsymbol{m}' : \hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_e \prec y_{e+1} \prec \cdots \prec y_{f-1} \prec x_f \prec y_{f+1} \prec \cdots \prec y_n = \hat{1}$ とし，$x_i = y_i$ for $i = 0, 1, \ldots, e$ および $x_i \neq y_i (i = e+1, \ldots, f-1)$ が成立しているものとする．$(P, \leq)$ は局所弱上半モジュラーであるので，$w_1, \ldots, w_\ell, u_1, \ldots, u_{\ell+1} \in P$ が存在して，$x_e \prec w_i$，$(i = 1, \ldots, \ell)$，$x_{e+1} = w_0, w_1 \prec u_1$，$w_1, w_2 \prec u_2, \ldots, w_\ell, w_{\ell+1} = y_{e+1} \prec u_{\ell+1}$ かつ $u_i \leq x_f$，$(i = 1, \ldots, \ell+1)$ を満たす．また，$u_i \leq x_f$，$(1 \leq i \leq q+1)$ であるから，$u_i = u_{ie+2} \prec u_{ie+3} \prec \cdots \prec$

$u_{if-1} \prec x_f$, $(1 \le i \le \ell+1)$ を満たす $u_{ie+3}, \cdots, u_{if-1}$ $(1 \le i \le \ell+1)$ が存在する．$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}^{(00)}$: $\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_e \prec x_{e+1} \prec \cdots \prec x_{f-1} \prec x_f \prec x_{f+1} \prec \cdots \prec x_n = \hat{1}$ とし，さらに$\boldsymbol{m}^{(01)}$: $\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_e \prec x_{e+1} \prec u_{1e+2} \prec \cdots \prec u_{1f-1} \prec x_f = y_f \prec y_{f+1} \prec \cdots \prec y_n = \hat{1}$とする．一般には，$\boldsymbol{m}^{(i0)}$: $\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_e \prec w_{i-1} \prec u_{i\,e+2} \prec \cdots \prec u_{i-1f-1} \prec x_f = y_f \prec y_{f+1} \prec \cdots \prec y_n = \hat{1}$ $(i = 1, \ldots, \ell+1)$ および $\boldsymbol{m}^{(i1)}$: $\hat{0} = x_0 \prec x_1 \prec \cdots x_e \prec w_i \prec u_{i\,e+2} \prec \cdots \prec u_{if-1} \prec x_f = y_f \prec y_{f+1} \prec \cdots \prec y_n = \hat{1}$ $(i = 1, \cdots, \ell)$, $\boldsymbol{m}^{\ell+1\,1} = \boldsymbol{m}'$とおく．すると，$\boldsymbol{m}^{(i0)}$と$\boldsymbol{m}^{(i1)}$ $(i = 0, \ldots, \ell+1)$ は色 $e+1$: $(\in \mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}'))$ で彩色されている辺で隣接している．また，$\boldsymbol{m}^{(i1)}$ と$\boldsymbol{m}^{(i+1\,0)}$ $(i = 0, \ldots, \ell)$ は，$|\boldsymbol{m}^{(i1)} \backslash \boldsymbol{m}^{(i+1\,0)}| \le k-1$ となり，帰納法の仮定から，$\boldsymbol{m}^{(i1)}$ と $\boldsymbol{m}^{(i+1\,1)}$ は $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}^{(i1)}, \boldsymbol{m}^{(i+1\,0)}) \subset \mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}')$ に含まれている色で彩色されている枝からなる道によって連結されている．

したがって，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{m}'$ は $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}')$ に含まれる色で彩色された辺からなる道で連結されていることが証明された．

（十分性）$x \prec u, v$ $(u \ne v)$ かつ $u, v \le t$ であるものとし，さらに $\mathrm{rank}\ u = \mathrm{rank}\ \ v = e+1$, $\mathrm{rank}\ \ t = f$とする．いま，$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ を$\boldsymbol{m}$: $\hat{0} \prec \cdots \prec x \prec u \prec x_{e+2} \prec \cdots \prec x_{f-1} \prec t \prec x_{f+1} \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec \hat{1}$ および $\boldsymbol{m}'$: $\hat{0} \prec \cdots \prec x \prec v \prec y_{e+2} \prec \cdots \prec y_{f-1} \prec t \prec x_{f+1} \prec \cdots \prec x_{n-1} \prec \hat{1}$ であるものとする．すると，$\mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}') \ni e+1$ である．仮定から，$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{m}'$ を結ぶ道で $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}')$ の中の色で彩色されている辺だけからなる道がある．その道における頂点を$\boldsymbol{m}^{(0)} = \boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}^{(1)}, \cdots, \boldsymbol{m}^{(p-1)}, \boldsymbol{m}^{(p)} = \boldsymbol{m}'$とする．すると，道の中の各頂点$\boldsymbol{m}^{(i)}$が x, t を含む極大鎖であることは明らかである．ここで，$\{\boldsymbol{m}^{(i_1)}, \boldsymbol{m}^{(i_1+1)}\}, \{\boldsymbol{m}^{(i_2)}, \boldsymbol{m}^{(i_2+1)}\}, \ldots, \{\boldsymbol{m}^{(i_k)}, \boldsymbol{m}^{(i_k+1)}\}$, $(i_1 < i_2 < \ldots < i_k)$ を道の中の辺で，辺の色が $e+1$ となっているものすべてであるとする．このとき，w_j $(j = 1, \ldots, k-1)$ を$\boldsymbol{m}^{i_j+1}$における u と同じランクを持つ頂点，u_j $(j = 1, \ldots, k)$ を$\boldsymbol{m}^{i_j}$の u より 1 つ大きいランクを持つ頂点とおけば，これらによって u, vの x, t に関する局所弱上半モジュラー 性が保証されることがわかる． ∎

補題 5.9 (局所上半モジュラー性の必要十分条件): $(P, \le)$ を次数付き半順序集合とする．このとき，$(P, \le)$ が局所上半モジュラーであるための必要十分条件は，任意の$\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}' \in \mathcal{M}$ に対して，$G(P)$ における$\boldsymbol{m}$ と $\boldsymbol{m}'$ を結ぶ $G(P)$ の道で，

(1) 道に含まれる各枝の色が, $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}') = \{i : \exists v \in \boldsymbol{m} \backslash \boldsymbol{m}'$ ただし $\mathrm{rank}\ v = i\}$ の中に含まれている色で彩色されている，

(2) 色 i が $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}')$ に含まれており，色 $i-1$ は $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}, \boldsymbol{m}')$ に含まれていないなら，道の中で色 i に彩色されている辺はただ 1 つである．

を満たすものが存在することである．

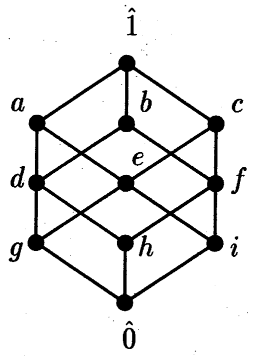
証明. 局所上半モジュラーの定義と，補題 5.8の証明から明らかである． ∎

定義 5.10 (性質 (C-k)): $(P, \leq)$ を次数付き半順序集合とする．$G(P)$ が性質 $(C\text{-}k)$ を持つとは，$S \subset \mathcal{M}$ $(|S| = k)$ と $S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_k = S$ $(|S_i| = i\,(1 \leq i \leq k))$ が存在して，$G(P)$ は $S_i\,(1 \leq i \leq k)$ に関して，性質 (C) を持つときをいう．

定理 5.11 (必要十分条件): 次数付き半順序集合 $(P, \leq)$ に付随した順序複体がシェリング可能であるための必要十分条件は，$G(P)$ が性質 $(C\text{-}|\mathcal{M}|)$ を持つことである．

証明. （必要性）$\boldsymbol{m}^1 <^\Omega \boldsymbol{m}^2 <^\Omega \ldots <^\Omega \boldsymbol{m}^{|\mathcal{M}|}$ を $(P, \leq)$ のシェリングとし，$S_k = \{\boldsymbol{m}^1, \boldsymbol{m}^2, \ldots, \boldsymbol{m}^k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, |\mathcal{M}|)$ とする．帰納法によって，$G(P)$ は S_kに関して性質 (C) を持つことを示す．$\boldsymbol{m}^1, \boldsymbol{m}^2$に対しては，性質 (C) を満たす道（この場合は枝）の存在は明らかである．任意の$\boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{m}^j$ $(i, j < k'(\leq k))$ に対して，$\boldsymbol{m}^i$ と$\boldsymbol{m}^j$ を結ぶ道で性質 (C) を満たすものが存在することを仮定する．$\boldsymbol{m}^1 <^\Omega \boldsymbol{m}^2 <^\Omega \ldots <^\Omega \boldsymbol{m}^{\mathcal{M}}$ がシェリングであるから，任意の $\boldsymbol{m}^i (i < k')$ および$\boldsymbol{m}^{k'}$に対して，$v \in \boldsymbol{m}^{k'} \backslash \boldsymbol{m}^i$ と$\boldsymbol{m}^j$ $(j < k')$ で $\{v\} = \boldsymbol{m}^{k'} \backslash \boldsymbol{m}^j$を満たすものが存在する．すると，辺 $\{\boldsymbol{m}^{k'}, \boldsymbol{m}^j\}$ の色は $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}^{k'}, \boldsymbol{m}^i)$ に含まれる．帰納法の仮定から，$\boldsymbol{m}^j$ と$\boldsymbol{m}^i$の間には，その辺の色が $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{m}^j)$ の中にある色しか使用しないような道が $G[S^{k'}]$ に存在する．$\mathrm{col}(\boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{m}^j) \subset \mathrm{col}(\boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{m}^{k'})$ であるから，$G(P)$ は $S_{k'}$に関して性質 (C) を持つことが証明された．
（十分性）性質 $C\text{-}|\mathcal{M}|$ が成立するので，$S_1 \subset S_2 \subset \cdots \subset S_{|\mathcal{M}|}$ $(|S_k| = k(1 \leq k \leq |\mathcal{M}|))$ が存在して，$G(P)$ は $S_k(1 \leq k \leq |\mathcal{M}|)$ に関して性質 (C) を持つようにできる．$S_0 = \emptyset$ かつ$\boldsymbol{m}^k = S_k \backslash S_{k-1}\,(1 \leq k \leq |\mathcal{M}|)$ とおく．すると，任意の$\boldsymbol{m}^i$ と $\boldsymbol{m}^j\,(i < j)$ に対して，$\boldsymbol{m}^i \in S_j$ と $\boldsymbol{m}^j\,(i < j)$ を結ぶ道で，道の中の各枝の色が $\mathrm{col}(\boldsymbol{m}^i, \boldsymbol{m}^j)$ に含まれているものが存在する．この道の中の点で，$\boldsymbol{m}^j$に隣接しているものを考えれば，定義2.3の条件 (3) が満たされることは明らかである．したがって，$\boldsymbol{m}^1 <^\Omega \boldsymbol{m}^2 <^\Omega \cdots <^\Omega \boldsymbol{m}^{|\mathcal{M}|}$ は$\Delta(P)$ のシェリングである． ■

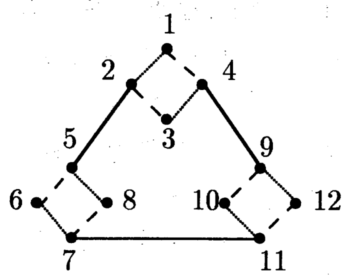
図 2の半順序集合の極大鎖グラフは 3 色に彩色された一つのサイクルになり，性質 $(C\text{-}|\mathcal{M}|)$ を持たない．あとで示すように，3 色に彩色された一つのサイクルのみからなる極大鎖グラフを持つ半順序集合 $(P, \leq)$ に対して，$\Delta(P)$ はシェリング可能ではない．また，図 3 の半順序集合の極大鎖グラフは一つのサイクルのみからなるわけではないが，付随する順序複体はシェリング可能ではない．これは，極大鎖グラフにおける，3 色以上で彩色されたサイクルがシェリング可能性に深く関わることを示唆している．一方，図 4の半順序集合の極大鎖グラフは 3 色で彩色されたサイクルを持つが，付随する順序複体はシェリング可能である．その根本的な違いは，図 4で示された極大鎖グラフにおける 3 色で彩色されたサイクルは，2 色で彩色されたサイクルに「分解」できるが，図 3のものはできない，というところである，と思われる．そこで本質的なサイクルの概念を導入する．



$(P, \leq)$

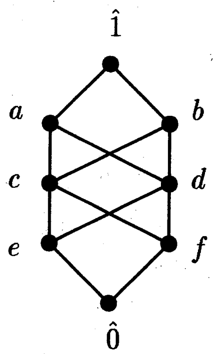
$$
\begin{array}{rl}
1: & \hat{0} \prec g \prec d \prec b \prec \hat{1} \\
2: & \hat{0} \prec g \prec d \prec a \prec \hat{1} \\
3: & \hat{0} \prec h \prec d \prec a \prec \hat{1} \\
4: & \hat{0} \prec h \prec d \prec b \prec \hat{1} \\
5: & \hat{0} \prec g \prec e \prec a \prec \hat{1} \\
6: & \hat{0} \prec g \prec e \prec c \prec \hat{1} \\
7: & \hat{0} \prec i \prec e \prec c \prec \hat{1} \\
8: & \hat{0} \prec i \prec e \prec a \prec \hat{1} \\
9: & \hat{0} \prec i \prec f \prec c \prec \hat{1} \\
10: & \hat{0} \prec i \prec f \prec b \prec \hat{1} \\
11: & \hat{0} \prec h \prec f \prec c \prec \hat{1} \\
12: & \hat{0} \prec h \prec f \prec b \prec \hat{1}
\end{array}
$$

極大鎖



$G(P)$

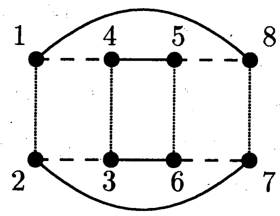
図 3: $G(P)$ がサイクルでないが, $\Delta(P)$ がシェリング可能でない例



$(P, \leq)$

$$
\begin{array}{rl}
1: & \hat{0} \prec e \prec c \prec a \prec \hat{1} \\
2: & \hat{0} \prec e \prec c \prec b \prec \hat{1} \\
3: & \hat{0} \prec e \prec d \prec b \prec \hat{1} \\
4: & \hat{0} \prec e \prec d \prec a \prec \hat{1} \\
5: & \hat{0} \prec f \prec d \prec a \prec \hat{1} \\
6: & \hat{0} \prec f \prec d \prec b \prec \hat{1} \\
7: & \hat{0} \prec f \prec c \prec b \prec \hat{1} \\
8: & \hat{0} \prec f \prec c \prec a \prec \hat{1}
\end{array}
$$

極大鎖



$G(P)$

図 4: $G(P)$ が 3 色のサイクルを含むが $\Delta(P)$ がシェリング可能である例

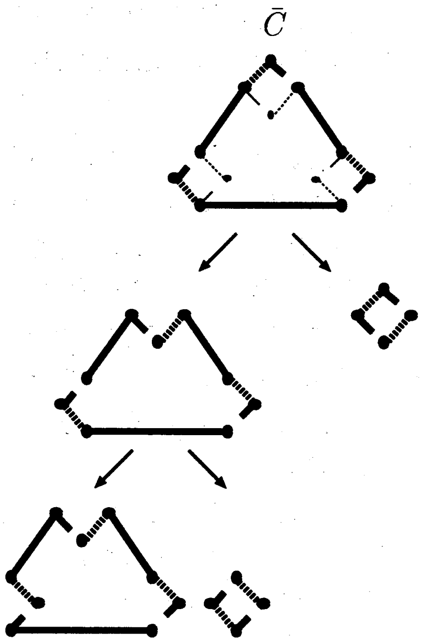


図 5: サイクルの分解 (本質的なサイクル)

定義 5.12 (本質的なサイクル): G を辺彩色グラフとする．$\bar{C}$ を G のサイクル 単純サイクル) としたとき，$\bar{C}$ を根とし，各ノードが G のサイクルからなる木を構成する．(図 5参照)

(1) $\bar{C}$ を根とし，活性ノードとする．

(2) C を木の活性なノードに対応する G のサイクルとする．C' を G のサイクルで，C と共通な辺を持ち，2 色以下で彩色されているものとする．$\{C_1, \ldots, C_k\}$ を C と C'の対称差 $C \oplus C'$ に含まれる全てのサイクルとする．このとき，C の子ノードを $C_1, \ldots, C_k$ および C'とし，Cと C'を不活性ノードとする．また，$\{C_1, \ldots, C_k\}$ のうちで，2 色以下で彩色されているものがあれば，やはり不活性ノードとする．不活性ノードとならない子ノードは活性ノードとする．

$\bar{C}$ を根とする木で，上の (2) を繰り返したときに，すべてのノードが不活性ノードとなるものが存在するとき，$\bar{C}$ を非本質的なサイクルといい，そうでない場合，本質的なサイクルという．

補題 5.13. $(P, \leq)$ を次数付き，局所弱上半モジュラーな半順序集合とする．C を $G(P)$ の本質的なサイクルとし，C' を Cと辺を共有する $G(P)$ の 2 色以下で彩色されているサイクルとする．また，$\{C_1, \ldots, C_k\}$ を C と C'の対称差 $C \oplus C'$に含まれる $G(P)$ の全てのサイクルとすると，C_i, $(1 \leq i \leq k)$ の中の一つは本質的なサイクルである．

証明. 明らか． ∎

定理 5.14 (必要条件): $(P,\leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラー半順序集合とする．$\Delta(P)$ がシェリング可能であれば，$G(P)$ は本質的なサイクルを含まない．

証明. 背理法で証明する．$\Delta(P)$ がシェリング可能であるものとし，$\boldsymbol{m}^1 <^{\Omega} \boldsymbol{m}^2 <^{\Omega} \cdots <^{\Omega} \boldsymbol{m}^{\ell}$ を$\Delta(P)$ のシェリングとする．さらに，$S_k = \{\boldsymbol{m}^1,\ldots,\boldsymbol{m}^k\}$ $(k=1,\ldots,\ell)$ とする．$S \subset \mathcal{M}$ に対して，$G(S)$ を Sによって誘導された$G(P)$ の部分グラフとする．このとき，k_0 $(1 < k_0 \leq |\mathcal{M}|)$ が存在して，$G(S_{k_0})$ は本質的なサイクルを含むが $G(S_{k_0-1})$ は本質的なサイクルを含まない．$\boldsymbol{m} = S_{k_0} \backslash S_{k_0-1}$ とし，また，C を $G(S_{k_0})$ における本質的なサイクルとする．このとき，明らかに$\boldsymbol{m}$は C の頂点である．$\boldsymbol{m}'$ と$\boldsymbol{m}''$ をCにおける$\boldsymbol{m}$に隣接している 2 つの頂点とする．$G(P)$ は S_{k_0-1}に関して性質 (C) を満たしているので，$G(S_{k_0-1})$ において$\boldsymbol{m}'$ と$\boldsymbol{m}''$を結ぶ，2 色以下で彩色されている道Πがある（$\boldsymbol{m} \notin S_{k_0-1}$であるから，$\boldsymbol{m} \notin \Pi$である）．ここで，$C$は 3 色以上で彩色されているから，$\Pi$は$C$に含まれない．$C' = \Pi \cup \{\boldsymbol{m}',\boldsymbol{m}\} \cup \{\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}''\}$ をサイクルとすると，$|\{C'$の辺の彩色に使用している色$\}| = |\mathrm{col}(\{\boldsymbol{m}',\boldsymbol{m}\}) \cup \mathrm{col}(\{\boldsymbol{m},\boldsymbol{m}''\})| \leq 2$ である．C が本質的なサイクルであるから，$C \oplus C'$の辺だけを使った本質的なサイクルが存在しなければならない (補題 5.13) が，これは，$G(S_{k_0-1})$ は本質的なサイクルを含まないという仮定に反する．したがって，$\Delta(P)$ はシェリング可能ではない． ∎

系 5.15. $(P,\leq)$ を次数付き局所弱上半モジュラーな半順序集合とする．$G(P)$ が 3 色以上で彩色されているサイクルであると，$\Delta(P)$ はシェリング可能ではない．

証明. $G(P)$ 自身が本質的なサイクルであることは自明なので，$\Delta(P)$ はシェリング可能ではない． ∎

参考文献

[1] Björner, A., "Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets." *Tans. Amer. Math. Soc.*, 260, 159-183 (1980).

[2] Brums, W. and J. Herzog, *Cohen-Macaulay Rings,* Cambridge University Press (1993).

[3] 日比孝之,「可環代数と組合せ論」，シュプリンガー・フェアラーク東京 (1995).

[4] Stanley, R., "Cohen-Macaulay rings and constructible polytopes," *Bull. Amer. Math. Soc.*, 81, 135-142 (1975).

[5] Stanley, R., "The Upper Bound Conjecture and Cohen-Macaulay rings," *Studies in Applied Math.*, 54, 135-142 (1975).

[6] Stanley, R., *Combinatrics and Commutative Algebra*, Birkhäuser, Boston, (1996).